Universidad Tecnológica Nacional Facultad Regional Buenos Aires
Examen Final de Probabilidad y Estadística - 1 de agosto de 2018

Apellido y Nombre: ....
Legajo: ....

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Teórico 1	Teórico 2	Nota

La condición mínima de aprobación es dos prácticos y un teórico correctos. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

Ejercicio 1 Un laboratorio medicinal quiere comparar la efectividad de dos medicamentos A y B para el tratamiento de la epilepsia en perros. Para ello se trataron dos grupos de caninos con síntomas similares. Se registró el tiempo en días que tardaron en estabilizarse las convulsiones en cada caso. Si las distribuciones de estos tiempos son normales con varianza común:

A	5	7	6	7	7	8	6	8	7	6
B	7	9	10	8	6	5	7	9	9	5

a) Analice con una significación del 5 % si existen diferencias entre los tiempos de ambos medicamentos.

b) Qué supuestos debe hacer para que sea válida la prueba?

Ejercicio 2 Sea X la variable aleatoria 'cantidad de multas recibidas por un automovilista durante un año'. La función de probabilidad puntual de X es:

k	0	1	2
$p_X(k)$	0.25	0.6	a

a) Hallar el valor esperado y la varianza de la cantidad de multas.

b) Si cada multa vale $2000, cuánto se espera que pague el automovilista en los próximos 5 años?

Ejercicio 3 La pérdida promedio en el peso de 16 pacientes después de una semana de tratamiento es de 3.42Kg.

a) Suponiendo normalidad construya un intervalo de confianza del 99 % para la pérdida promedio real de peso. para el caso $\sigma = 0{,}68$ kg conocida y para el caso de σ desconocida y s=0.68 kg

b) Compare las longitudes de los dos intervalos y explique.

Ejercicio 4 Suponga que la duración de un mecanismo electrónico (medida en miles de horas) es una variable aleatoria exponencial con parámetro 1 y que el costo de manufactura de uno de tales mecanismos es $20. El fabricante los vende a $50, pero garantiza la devolución del mecanismo si la duración del mismo es de 800 hs ó menos. ¿Cuál es la ganancia esperada por cada mecanismo?

Teórico 1 Defina experimento binomial y variable aleatoria binomial. Señale los parámetros de esta variable y exprese su esperanza y varianza en términos de ellos. Vincule la v.a. binomial con la v.a. Poisson.

Teórico 2 Deduzca la expresión del intervalo de confianza para la varianza de una población con distribución normal.

PyE - UTN 1-8-18

EJ 1 Un laboratorio medicinal quiere comparar la efectividad de dos medicamentos A y B para el tratamiento de la epilepsia en perros. Para ello se trataron dos grupos de caninos con síntomas similares. Se registró el tiempo en días que tardaron en estabilizarse las convulsiones en cada caso. Si las distribuciones de estos tiempos son normales con varianza común:

A	5	7	6	7	7	8	6	8	7	6
B	7	9	10	8	6	5	7	9	9	5

a) Analice con una significación del 5% si existen diferencias entre los tiempos de ambos medicamentos.

$\bar{X}_A = 6,7$ $\bar{X}_B = 7,5$

$S_A = 0,95$ $S_B = 1,78$

$n_A = 10$ $n_B = 10$

Población normal con varianza igual

$\alpha = 0.05$

$H_0: \mu_A = \mu_B$ vs $H_1: \mu_A \neq \mu_B$

$$T_{obs} = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{S_F\sqrt{\frac{1}{n_A}+\frac{1}{n_B}}} \sim t_{n_A+n_B-2}$$

$$S_F^2 = \frac{(n_A-1)S_A^2 + (n_B-1)S_B^2}{n_A+n_B-2} = \frac{9 \times 0{,}95^2 + 9 \times 1{,}78^2}{10+10-2} = 2{,}035 = S_F^2 \rightarrow S_F = 1{,}43$$

$$\rightarrow t_{obs} = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{1{,}43\sqrt{\frac{2}{10}}} = \frac{\bar{X}_B - \bar{X}_A}{0{,}6395} \rightarrow \text{Rechazo } H_0 \text{ si } |t_{obs}| > t_{18,0.025}$$

$$\left\{\begin{array}{l} t_{obs} = \frac{7{,}5-6{,}7}{0{,}6395} = 1{,}2509 \\ t_{18,0.025} = 2{,}101 \end{array}\right\} |t_{obs}| < t_{18,0.025} \rightarrow \text{No rechazo } H_0$$

∴ No hay evidencias de que hayan diferencias entre ambos medicamento

b) ¿qué supuestos debe hacer para que sea válida la prueba?

No sé... que los perros tengan edades y pesos similares y que la enfermedad tenga el mismo grado de afección. y que las dosis hayan sido similares.

Sylvina

EJ 2 Sea X la v.a. "cantidad de multas recibidas por un automovilista durante un año". La función de probabilidad puntual de X es:

k	0	1	2
$p_X(k)$	0,25	0,6	a

$0,25 + 0,6 + a = 1 \rightarrow a = 0,15$

a) Hallar el valor esperado y varianza de la cantidad de multas.

- $E(X) = \sum_{k=0}^{2} k_i \times p_X(i) = 0 \times 0,25 + 1 \times 0,6 + 2 \times 0,15 = \boxed{0,9 = E(X)}$

$E(X^2) \sum_{k=0}^{2} k_i^2 \times p_X(a) = 0^2 \times 0,25 + 1^2 \times 0,6 + 2^2 \times 0,15 = 1,2 = E(X^2)$

$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1,2 - 0,9^2 = \boxed{0,39 = V(X)}$

b) Si cada multa vale \$2000, ¿cuánto se espera que pague el automovilista en los próximos 5 años?

$Y = \sum_{i=1}^{5} X_i * 2000 \rightarrow E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{5} X_i \times 2000\right) = 2000\, E\left(\sum_{i=1}^{5} X_i\right) =$

$= 2000 \sum_{i=1}^{5} \underbrace{E(X_i)}_{0,9} = 2000 \times 5 \times 0,9 = \boxed{9000 = E(Y)}$

EJ 3 La pérdida promedio en el peso de 16 pacientes después de una semana de tratamiento es de 3,42 kg.

a) Suponiendo normalidad construye un intervalo de confianza del 99% para la pérdida promedio real de peso para el caso $\sigma = 0,68$ kg conocido y para el caso de σ desconocida y $s = 0,68$ kg

$\bar{X} = 3,42$
$\alpha = 0,01$
$\sigma = 0,68$
$n = 16$
$X \sim N$

$IC_{0,99}(\mu) = \left[\bar{X} - z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + z_{1-\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] =$

$= \left[3,42 - 2,575 \cdot \frac{0,68}{4} ; 3,42 + 2,575 \cdot \frac{0,68}{4}\right] =$

$z_{1-\frac{\alpha}{2}} = z_{0,995} = 2,575$

$\boxed{= [2,98 ; 3,86] = IC_{0,99}(\mu)}$ con $\sigma = 0,68$

$s = 0,68$

$IC_{0,99}(\mu) = \left[\bar{X} - t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{s}{\sqrt{n}} ; \bar{X} + t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} \frac{s}{\sqrt{n}}\right] =$

$t_{n-1,\frac{\alpha}{2}} = t_{15,0,005} = 2,947$

$= \left[3,42 - 2,947 \cdot \frac{0,68}{4} ; 3,42 + 2,947 \cdot \frac{0,68}{4}\right] =$

$\boxed{= [2,92 ; 3,92] = IC_{0,99}(\mu)}$ con $s = 0,68$

PyE

1-8-18

EJ 4 Suponga que la duración de un mecanismo electrónico (medidos en miles de horas) es una v.a. exponencial con parámetro 1, y que el costo de manufactura de uno de tales mecanismos es \$20. El fabricante los vende a \$50 pero garantiza la devolución del mecanismo si la duración del mismo es de 800 hs o menos. ¿Cuál es la ganancia esperada por cada mecanismo?

X: "duración (en miles de horas) de un mecanismo electrónico" $X \sim \mathcal{E}xp(1)$, $\lambda = 1$

Y: "ganancia obtenida por mecanismo, en pesos"

$$Y = \begin{cases} 30 & \text{si } X > 0.8 \\ 0 & \text{si } X \leq 0.8 \end{cases}$$

$$E(Y) = 30 \cdot P(X > 0.8) + \underbrace{0 \cdot P(X \leq 0.8)}_{0} = 30 \times 0{,}4493 = 13{,}48$$

CA

$$P(X > 0.8) = 1 - P(X \leq 0.8) = 1 - (1 - e^{-x}) = 0{,}4493$$

$$\boxed{E(Y) = 13{,}48}$$

teórico 1 | Defina experimento binomial y v.a. binomial. Señale los parámetros de esta variable y exprese su esperanza y varianza en términos de ellos. Vincule la v.a. binomial con la v.a. Poisson

Experimento binomial

Consiste en ensayos independientes realizados en forma repetitiva, cada uno con dos posibles resultados que se denominan Éxito o Fracaso donde la probabilidad de éxito es la misma en cada ensayo.

Variable Aleatoria binomial

Es el número X de Éxitos en n ensayos de un experimento binomial

Parámetros: n: cantidad de ensayos

p: probabilidad de éxito de cada ensayo

$E(X) = n \cdot p$ $\qquad V(X) = np(1-p)$

Vinculación Binomial - Poisson

Puede considerarse que la distribución Poisson es el límite al cual tiende una distribución binomial cuando el número de elementos tiende a infinito.

Sylvina

Teórico 2 | Deduzca la expresión del intervalo de confianza para la varianza de una población con distribución normal.

$x_1, x_2, \dots x_n$ v.a.i.i.d $\sim N(\mu, \sigma)$

$$(n-1) \cdot \frac{S^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$$

$$1-\alpha = P\left(\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}} \leq (n-1)\frac{S^2}{\sigma^2} \leq \chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}{n-1} \leq \frac{S^2}{\sigma^2} \leq \frac{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}}{n-1}\right) =$$

$$= P\left(\frac{n-1}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} \geq \frac{\sigma^2}{S^2} \geq \frac{n-1}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}}\right) =$$

$$= P\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} \geq \sigma^2 \geq \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, \frac{\alpha}{2}}}\right)$$

$$\boxed{IC_{1-\alpha}(\sigma^2) = \left[\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}} ; \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1, 1-\frac{\alpha}{2}}}\right]}$$